

УДК 004:57:616-07

О. Г. РУДНИЦКИЙ, М. О. РУДНИЦКА, Л. В. ТКАЧЕНКО**ФРАКТАЛЬНА ТА МОРФОЛОГІЧНА ОБРОБКА У ФАЗОВО-КОНТРАСТНІЙ МАГНІТО-РЕЗОНАНСНІЙ АНГІОГРАФІЇ**

Магнітно-резонансна томографія (МРТ) – це метод відображення внутрішньої структури матеріальних об'єктів, заснований на явищі ядерного магнітного резонансу і широко застосовуваний у задачах медичної діагностики. Переваги МРТ перед рентгівівською комп'ютерною томографією складаються з можливості отримання необов'язково паралельних перерізів, з більш високою роздільною здатністю, та у відсутності шкідливого жорсткого променевого впливу на пацієнтів і обслуговуючий персонал. У цій роботі ми представляємо технології сегментації та шумоподавлення, розроблені для 3D MRT-зображень, що базуються на методах фрактальної фільтрації та математичної морфології.

Ключові слова: 3D-сегментація, фрактальна розмірність, математична морфологія.

А. Г. РУДНИЦКИЙ, М. А. РУДНИЦКАЯ, Л. В. ТКАЧЕНКО**ФРАКТАЛЬНАЯ И МОРФОЛОГИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА В ФАЗОВО-КОНТРАСТНОЙ МАГНИТО-РЕЗОНАНСНОЙ АНГИОГРАФИИ**

Магнитно-резонансная томография (МРТ) – это метод отображения внутренней структуры материальных объектов, основанный на явлении ядерного магнитного резонанса и широко применяемый в задачах медицинской диагностики. Преимущества МРТ перед рентгеновской компьютерной томографией состоят из возможности получения необязательно параллельных сечений, с более высоким разрешением, и в отсутствии вредного жесткого лучевого воздействия на пациентов и персонал. В этой работе мы представляем технологию сегментации и шумоподавления, разработанную для 3D MRT-изображений, которая базируется на методах фрактальной фильтрации и математической морфологии.

Ключевые слова: 3D-сегментация, фрактальная размерность, математическая морфология.

A. G. RUDNITSKII, M. A. RUDNYTSKA, L. V. TKACHENKO**FRactal and Morphological Processing for Phase Contrast MRI Image of the Aortic Lumen**

Magnetic resonance imaging (MRI) is a method of displaying the internal structure of material objects, based on the phenomenon of nuclear magnetic resonance and widely used in the tasks of medical diagnostics. Advantages of MRI before X-ray computed tomography include the possibility of obtaining optionally parallel cross sections, with higher resolution, and in the absence of harmful rigid radiation effects on patients and attendants. In this work, we present segmentation and noise reduction technologies developed for 3D MRT images based on fractal filtration and mathematical morphology.

Key words: 3D segmentation, fractal dimension, mathematical morphology.

Вступ. Бурхливе вдосконалення інформаційних технологій та стрімкий розвиток сучасної апаратної бази, що відбуваються останнім часом, призвели до значного покращення у сфері медичної візуалізації. Досягнення у комп'ютерній томографії, ультразвукових дослідженнях, позитронно-емісійній та магнітно-резонансній томографії успішно використовуються для діагностики багатьох видів захворювань та вибору найбільш ефективної терапії. Ці методи розглядаються як найточніші форми візуалізації, доступні для раннього виявлення та діагностики різних захворювань. Проте, наявність шуму та розмивів у зображенні органів, різноманіття тканин та біологічних форм, робить аналіз медичних образів досить складним завданням. Присутність маскуючих структур призводить до накладання зображень різних органів одне на одне і значно підвищує ймовірність постановки невірної діагнозу. Крім того, простий аналіз двовимірних томографічних зображень тривимірних органів також може бути причиною помилкових висновків. Класичний приклад – конус. Навіть для цього простого тривимірного об'єкта поперечний переріз може бути параболою, колом, еліпсом, однією або двома лініями чи однією точкою. А саме з такими видами зображень – двовимірними перерізами або проекціями органів – лікарі зазвичай мають справу. Позбавитись від цих недоліків дозволяє тривимірна візуалізація, знешумлення та сегментація.

Існує декілька розповсюджених технологій для отримання 3D-зображень. Найвідоміша з них базується на отриманні серії поперечних перетинів предмета дослідження і наступної реконструкції з цих перетинів тривимірного зображення.

У пропонованій роботі для 3D знешумлення та сегментації фазового контрастного МРТ-зображення просвіту аорти, були використані відносно нові методи – фрактальна теорія та математико-морфологічний підхід. Використання цих методів створило цікавий та потужний інструмент для комплексної обробки досліджуваного тривимірного об'єкту.

Сегментація. Сегментація зображення – це процес його розкладання на декілька однорідних неперекриваючих одна одну областей, об'єднання яких є цілим зображенням. При цьому ступінь деталізації розкладання образу залежить від поставленої проблеми. Сегментація є одним з найскладніших завдань будь-якого аналізу образів, оскільки тут на вхід системи подається зображення, а на виході процесу отримують властивості та атрибути, які вилучаються з інформаційного змісту образу. У медичному контексті сегментація – це пошук набору пікселів у зображенні, згрупованих таким чином, щоб вони представляли один і той же тип тканини, сформували єдину, фізіологічно однорідну область. Саме такий напрям досліджень є перспективним на практиці, наприклад,

© О. Г. Рудницький, М. О. Рудницький, Л. В. Ткаченко, 2019

для дослідження конкретного органу людини. Для того, щоб відрізнити об'єкти у зображенні, використовується цілий ряд різноманітних особливостей образу: яскравість, межі, конкретні форми, текстури, контраст, градієнти і т.п.

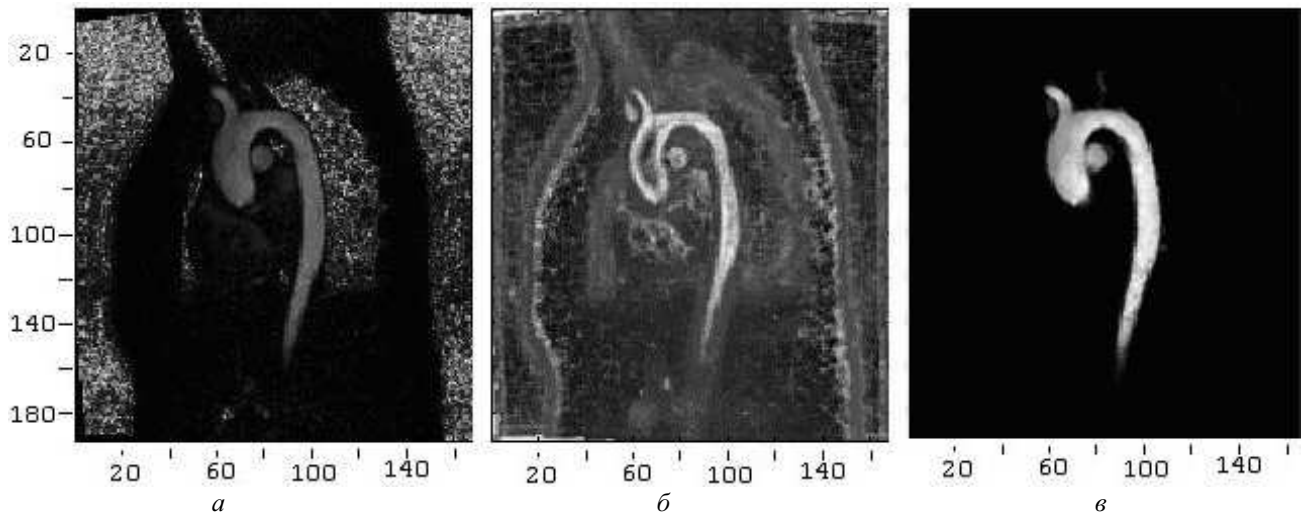


Рис. 1. – Фрактальна сегментація 14-го перерізу $192 \times 168 \times 28$ 3D МРТ образу аорти (усі вісі у пікселях): *a* – оригінальне зображення; *б* – зображення у просторі фрактальних розмірностей; *в* – остаточне сегментоване зображення аорти.

Але часто у практиці медичної візуалізації виникають проблеми, які цими методами розв'язуються не досить задовільно. Так, наприклад, на рис. 1, *a* представлено 14-й перетин тривимірного МРТ-зображення аорти, розміром $192 \times 168 \times 28$ пікселів. На цьому 2D зображенні представлені також інші органи (легені поруч із центральною частиною аорти, елементи кишковика у нижній частині образу) і шум (яскраві області у лівій та правій частинах зображення). У деяких областях зображення ці накладені паразитні структури мають інтенсивність навіть вищу, ніж область інтересу (аорта). Тому, у цій ситуації, звичайні методи, засновані на аналізі інтенсивностей або градієнтів, не дозволять здійснити якісну сегментацію зображення. З іншого боку, очевидно, що структура та текстура різних органів на зображенні суттєво відрізняються для різних областей образу. Тому здається розумним використати саме ці особливості. Для цього були застосовані такі, відносно сучасні інструменти аналізу образів, як методи, засновані на фрактальному аналізі та морфологічній обробці зображень.

Фрактальна сегментація. Термін "*фрактал*" був вперше використаний Бенуа Мандельбротом (Benoit Mandelbrot), математиком, який народився у Варшаві (1924 р) і працював у Франції та США [1, 2]. Походить цей термін від латинського *fractare* – ламати, дробити (*fractus* – розчленований, розбитий; англ. *fractal* – дробовий). Згідно з визначенням Б. Мандельброта, фракталом називається множина, розмірність Хаусдорфа – Безиковича якої строго більше її топологічної розмірності.

Б. Мандельброт дає також інше визначення: фракталом називається структура, що складається з частин, які в якомусь, наперед визначеному сенсі, подібні цілому. Він використовував цей термін для опису складної геометрії об'єктів у природі. Ця, революційна свого часу теорія, сьогодні широко застосовується у багатьох сферах, починаючи з молекулярної фізики і біохімії й до великомасштабної структури Всесвіту, і допомагає у розробці нових концептуальних інструментів та ідей.

Остаточного визначення фракталу не існує й дотепер, але можна стверджувати, що однією з найбільш універсальних характеристик фрактальних об'єктів є фрактальна розмірність (FD).

Фрактальна розмірність компактного метричного простору X – це число FD , таке, що якщо $N(r)$ – це мінімальне число відкритих множин (*сфер*) діаметру не більше ніж r , які покривають X , тоді $N(r)$ пропорційне r^{-FD} при $r \rightarrow 0$. Тобто

$$FD \equiv - \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N}{\ln r}.$$

Загалом, фрактальна розмірність є узагальненням евклідової розмірності, і може виступати як міра складності об'єкту. Тому у теорії обробки сигналів і зображень цю величину часто застосовують у якості кількісного дескриптору для ідентифікації особливостей різних компонентів і тканин з відмінними морфологічними ознаками та функціональними особливостями. Зрозуміло, що саме такого роду задачі часто виникають при аналізі та обробці різноманітних медичних зображень (МРТ, комп'ютерна томографія, ультразвукові дослідження).

Так, наприклад, на зображенні, показаному на рис. 1, *a*, ми бачимо, що аорта є більш евклідовим об'єктом, ніж фракталоподібні легені або шум, тому можна припустити, що для аналізу та обробки зображення такого типу саме фрактальний підхід може виявитися більш ефективним, ніж, наприклад, підхід, заснований на аналізі інтенсивностей.

Для перевірки цього припущення ми спочатку трансформували МРТ-зображення з простору інтенсивностей у простір фрактальних розмірностей FD . Реалізація цього перетворення була досягнута шляхом застосування алгоритму диференціального підрахунку боксів [4] на різних масштабах. Це дозволило виявити області з різною текстурою біологічних тканин та ізолювати зашумлені області зображення.

Обчислювати фрактальну розмірність можна багатьма методами: визначити Хаусдорфову розмірність, застосувати метод підрахунку боксів чи обрахувати ємнісну розмірність [3 – 6]. У нашому випадку був застосований алгоритм диференціального підрахунку боксів на різних масштабах, який показав високу ефективність при підрахунку фрактальних розмірностей значних за розмірами зображень [4].

Згідно цього підходу, напівтонове зображення із шкалою градації сірого представляється як поверхня у тривимірному просторі. При цьому оригінальне зображення $I(x, y)$ розміру $M \times N$ пікселів трансформується у FD образ з допомогою застосування скануючого нелінійного ядра $w(s, t)$ розміру $m \times n$, яке виконує пошук різностей між пікселями з найвищою (p_{\max}) та найменшою (p_{\min}) інтенсивностями. Невід’ємні змінні a і b визначають центр ядра для пікселя p_{xy} у оригінальному зображенні. Ядро розраховується згідно співвідношення

$$w(s, t) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \text{floor} \left[\frac{p_{\max}(s, t) - p_{\min}(s, t)}{r} \right] + 1,$$

де $r = 2, 3, \dots, j$, $a = \text{ceil} \left(\frac{m-1}{2} \right)$, $b = \text{ceil} \left(\frac{n-1}{2} \right)$. Тоді необхідне число боксів, потрібних для того, щоб повністю покрити образ розраховується як:

$$N_d(x, y, d) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) I(x+s, y+t) (j/r)^2,$$

де $d = 1, 2, \dots, j-1$. Остаточню, фрактальну розмірність FD визначають як нахил лінійної регресії у подвійному логарифмічному масштабі змінних $N_d(x, y, d)$ і r [4].

Результат цієї процедури показаний на рис. 1, б. На рисунку ясно видно, що перехід від простору інтенсивностей у простір фрактальних розмірностей дозволив досить якісно виявити об’єкти з різною структурною складністю. Тепер, до цього зображення вже можна застосовувати *традиційні методи сегментації*. Зокрема, якщо до зображення на рис. 1, б застосувати *порогову обробку за алгоритмом Отцу*, то на виході отримаємо бажаний результат – зображення аорти (рис. 1, в), очищене як від зображення легеневої тканини, що оточує цю аорту, так і від апаратних шумів, які в оригінальному зображенні мають досить велику інтенсивність і займають значну площу.

Після застосування цього алгоритму до кожного перерізу, остаточно було отримане очищене тривимірне зображення аорти (рис. 3, а).

Морфологічна сегментація. Термін «морфологія» походить від давньогрецької «*μορφη*» – «форма» та «*λογος*» – «доктрина», «слово». Тобто морфологія, це наука, що вивчає форми і паттерни, їх взаєморозташування та співвідношення до цілого (Gestalt). При цьому у якості предмету вивчення можуть виступати фізичні об’єкти (як, наприклад, у геології, астрономії, біології), соціальні об’єкти (організації та соціальні системи), ментальні об’єкти (лінгвістичні форми, концепції чи системи ідей).

Математична морфологія (ММ) – галузь математики, яка базується на теорії множин, топології та випадкових функціях. У контексті обробки зображень математична морфологія є інструментом для вилучення визначених компонентів зображення, корисних для представлення та опису форми об’єктів (границь, остовів, опуклих чи вгнутих оболонок). Історично, математична морфологія почалася як методика для вивчення випадкових множин із застосуванням у гірничодобувальній промисловості [7]. У даний час, вона використовується для відокремлення, модифікації та об’єднання структур зображення [7 – 9]. Ця методика обробки зображень полягає у порівнянні об’єктів, що аналізуються (зображення), з іншим об’єктом відомої форми, що називається структуруючим елементом. Змінюючи структуруючий елемент, ми можемо вилучати різні типи інформації з сигналу. Структуруючий елемент може характеризуватися формою, шириною та висотою. Результат обробки морфологічних зображень залежить від розміру та вмісту структуруючого елементу, а також від використовуваної морфологічної операції.

Базовими операціями у ММ є *морфологічна дилатація* та *ерозія*. Усі інші методи та алгоритми аналізу та обробки у ММ є їхніми комбінаціями.

Морфологічне нарощування (дилатація) зображення $f(x)$ з градацією сірого на множині X структурним елементом B визначається, як максимальне значення оригінального образу у околі, визначеному структурним елементом у точці x ,

$$[\delta_B(f)](x) = \max_{b \in B} f(x+b).$$

Морфологічна ерозія зображення $f(x)$ – операція обернена до попередньої і визначається виразом:

$$[\varepsilon_B(f)](x) = \min_{b \in B} f(x+b).$$

Морфологічне розмикання (*open*) $\gamma_B(f)$ образу $f(x)$ структуруючим елементом B визначається як морфологічне нарощування образу після його ерозії структуруючим елементом B :

$$\gamma_B(f) = \delta_B[\varepsilon_B(f)].$$

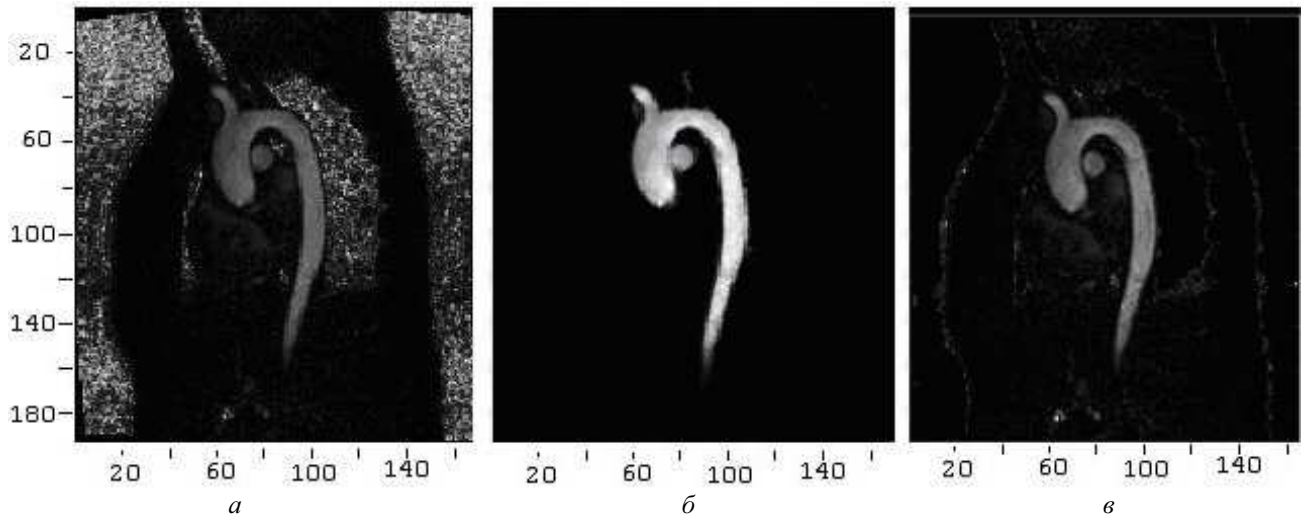


Рис. 2. – Сегментація 14-го перерізу $192 \times 168 \times 28$ 3D MPT образу аорти (усі вісі у пікселях): a – оригінальне зображення; b – результат фрактальної сегментації; c – результат морфологічної сегментації.

У загальному випадку розмикання згладжує контури об'єкта, обриває вузькі перешийки та ліквідує виступи з невеликими розмірами.

Морфологічне замикання (*close*) $\varphi_B(f)$ образу $f(x)$ структуруючим елементом B є оберненою операцією до попередньої і визначається як морфологічна ділатація образу $f(x)$ із структуруючим елементом B до якого застосована ерозія із структуруючим елементом B :

$$\varphi_B(f) = \varepsilon_B[\delta_B(f)].$$

Замикання також проявляє тенденцію до згладжування контурів, але, на відміну від розмикання, у загальному випадку воно заповнює вузькі розриви та довгі поглиблення малої ширини, а також ліквідує невеликі отвори і заповнює проміжки контуру.

При розробці нашого алгоритму ми виходили з ряду характеристик, властивих досліджуваному тривимірному образу: повітропроводи у легенях є кусковолінійними формами і можуть бути представлені у 2D випадку як зв'язані лінійні сегменти, а у 3D випадку – як пов'язані між собою циліндри, що формують деревоподібну структуру. Інші органи та маскуючі фактори (альвеоли чи шум) можуть бути представлені як сфери різного діаметру. Нагадаємо, що метою обробки у нашому випадку є стінки аорти. Виходячи із зазначеного, у нашому сегментуючому алгоритмі застосовуються два типи структуруючих елементів: циліндри різного радіусу, вісь яких може змінювати свій напрям у просторі, та сфери з різними радіусами. Радіуси циліндрів і сфер змінювались послідовно від одного пікселя до 7. При цьому були реалізовані такі морфологічні операції, як мінімізуюче морфологічне відкриття та морфологічна реконструкція ділатацією.

Нагадаємо, що при морфологічній реконструкції застосовується два образи – так званий маркер f та маска g . Ці образи мають бути однакової розмірності і задовольняти умові $f \leq g$.

Морфологічне відкриття образу з циліндричним структуруючим елементом B , довжини L радіусу r видаляє циліндричні форми у тривимірному образі, якщо структуруючий елемент і форма у образі взаємно ортогональні. Таке видалення еквівалентне заміні відповідних форм локальним оточуючим фоном. Отже, для деревоподібної структури (геометрична модель легенів) існує циліндрична форма з принаймні одним напрямком і одним радіусом, яка співпадає з «гілкою» цієї структури і може бути видалена відповідно підібраним структуруючим елементом та замінена локальним фоном. Таким чином, послідовно видаляючи з оригінального образу спочатку шумову складову (структуруючий елемент – сфери змінного радіусу), а потім – елементи легеневої тканини (структуруючий елемент – змінні за напрямом та радіусом циліндри), що оточує аорту, було отримане тривимірне відфільтроване та сегментоване зображення аорти. Зауважимо, що на відміну від першого методу, коли послідовно сегментувався кожен двовимірний переріз і лише потім формувався тривимірний образ, морфологічний підхід дозволяє працювати одразу безпосередньо з тривимірним образом, що більш фізично зумовлено і повинно давати якісніші результати.

На рис. 2 та рис. 3, б надано результати порівняння роботи запропонованих алгоритмів відповідно у двовимірному та тривимірному представленні. У верхній частині рисунку представлено результат фрактального підходу до сегментації аналізованого MPT-образу, а у нижній частині – вихід алгоритму, заснованого на методах математичної морфології.

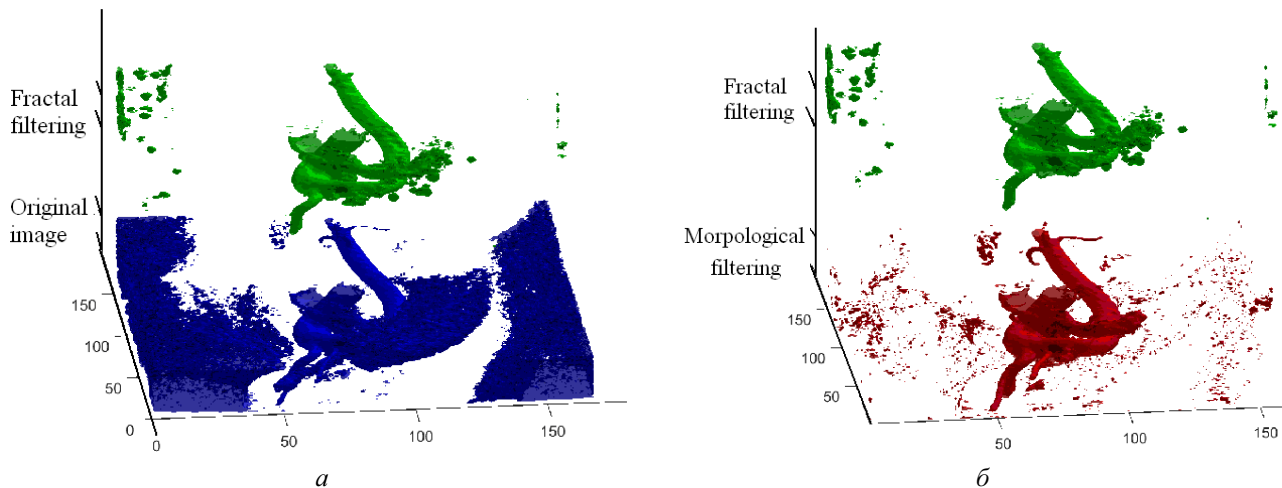


Рис. 3 – Знешумлення та сегментація $192 \times 168 \times 28$ 3D MPT образу аорти (усі вісі у пікселях):
 а – оригінальний образ (нижнє зображення), та результат фрактальної фільтрації та сегментації;
 б – порівняння фрактальної (верхнє зображення) та морфологічної сегментації.

Висновки. Сучасні технології MPT не тільки дають можливість неінвазивно (без втручання) візуалізувати внутрішні органи людини, але й досліджувати роботу цих органів – вимірювати швидкість кровотоку, току спинно-мозкової рідини, визначати рівень дифузії у тканинах, бачити активацію кори головного мозку при функціонуванні органів, за які відповідає досліджувана ділянка мозку. MPT дослідження особливо актуальні у ситуаціях, коли пацієнтам потрібно багаторазово проходити дослідження і тому при застосуванні комп'ютерної томографії вони можуть отримати завелике радіологічне навантаження. У запропонованій роботі представлені алгоритми сегментації та покращення якості тривимірної зображення просвіту аорти у фазово-контрастній магніто-резонансній ангіографії. Отримані результати демонструють високу ефективність розроблених алгоритмів, які базуються на методах фрактального аналізу та математичної морфології. Показано, що розроблені програми обробки зображень здатні якісно відокремлювати область інтересу від складного фону з шумом та з маскуючими структурами.

Зокрема, було виявлено, що однією з переваг фрактального аналізу у порівнянні з «класичним» аналізом сигналу є спосіб обробки неоднорідностей. А саме – при застосуванні фрактальних методів аналізу інформація вилучається безпосередньо з усього об'єкту – глобально. Отже, така сегментація не призводить до деградації вихідного зображення: взаємозв'язок між пікселями залишається незмінним. Таким чином, деталі зображення повністю зберігаються, що особливо важливо при постановці діагнозу та моніторингу захворювання.

З іншого боку, використання методів математичної морфології дозволяє більш точно виявляти дрібні деталі і демонструє високу ефективність з точки зору витрат комп'ютерного часу. Такі особливості, зокрема, забезпечили можливість не тільки виконати тривимірну обробку зображення, але й реалізувати якісну й швидку чотири-тривимірну сегментацію і отримати анімацію роботи легенів і аорти у часі.

Таким чином, обидва способи показали свою ефективність, а вибір конкретного підходу залежатиме від потреб практики. Запропоновані авторами підходи є досить універсальними для обробки MPT-зображень грудної клітини і дозволяють синтезувати аналогічні алгоритми для вельми широкого діапазону задач обробки та розпізнавання образів.

У подальшому планується розробити об'єктивні методи оцінки якості знешумлення та сегментації досліджуваних тривимірних об'єктів з метою порівняння цих методів між собою, та з суб'єктивними оцінками експертів.

Подяки. Автори висловлюють подяку за підтримку представлених досліджень бюджетною програмою «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230) і фінансування ЄС проекту EUMLS (EU-Ukrainian Mathematicians for Life Sciences) – grant agreement PIRSES-GA-2011-295164-EUMLS, та лабораторії біомеханіки кафедри електроніки, інформації та біоінженерії Політехнічного університету Мілана.

Список літератури

1. Mandelbrot B. B. Les Objets Fractals // Flammarion, 4 edition. – 1995. – 220 p. – ISBN: 2-08-081301-3.
2. Mandelbrot B. B. Fractal Geometry of Nature. // San-Francisco : W. H. Freeman and Co. – 1982. – 460 p.
3. Chen S. S., Keller J. M., Crownover R. M. On the calculation of fractal features from images // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – 1993. – vol. 15. – № 10. – P. 1087 – 1090.
4. Sarkar N., Chaudhury B. B. An Efficient Differential Box-counting Approach to Compute Fractal Dimension of Image // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. – 1994. – vol. 24. – № 1. – P. 115 – 120.
5. Traina C. J., Traina A., Wu L., Faloutsos C. Fast feature selection using fractal dimension // in Proc. 15th Braz. Symp. Databases. – 2000. – pp. 158 – 171.
6. Omar S. Al-Kadi, Watson D. Texture analysis of aggressive and nonaggressive lung tumor CE CT images // IEEE Trans. Biomed. Eng. – Jul. 2008. – vol. 55. – № 7. – P. 1822 – 1830.
7. Matheron G. Random sets and integral geometry // New York : John Wiley & Sons, – 1975. – 261 p.

8. Haralick R. M., Sternberg S. R., Zhuang X. Image analysis using mathematical morphology // IEEE Trans. PAMI. – 1987. – vol. 9. – №. 4. – P. 532 – 550.
9. Heijmans H. J. A. M. Morphological image operators. Advances in electronics and electron physics, supplement. – Boston : Academic Press, MA, 1994. – 520 p.

References (transliterated)

1. Mandelbrot B. B. *Les Objets Fractals*. Flammarion, 4 edition. 1995. 220 p. ISBN: 2-08-081301-3.
2. Mandelbrot B. B. *Fractal Geometry of Nature*. San-Francisco, W. H. Freeman and Co. 1982. 460 p.
3. Chen S. S., Keller J. M., Crownover R. M. On the calculation of fractal features from images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1993, vol. 15, no. 10, pp. 1087–1090.
4. Sarkar N., Chaudhuri B. B. An Efficient Differential Box-counting Approach to Compute Fractal Dimension of Image. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*. 1994, vol. 24, no. 1, pp. 115–120.
5. Traina C. J., Traina A., Wu L., Faloutsos C. Fast feature selection using fractal dimension. in *Proc. 15th Braz. Symp. Databases*. 2000, pp. 158–171.
6. Omar S. Al-Kadi, Watson D. Texture analysis of aggressive and nonaggressive lung tumor CE CT images. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2008, vol. 55, no. 7, pp. 1822–1830.
7. Matheron G. *Random sets and integral geometry*. New York, John Wiley & Sons Publ., 1975. 261 p.
8. Haralick R. M., Sternberg S. R., Zhuang X. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Trans. PAMI*. 1987, vol. 9, no. 4, pp. 532–550.
9. Heijmans H. J. A. M. *Morphological image operators. Advances in electronics and electron physics, supplement*. Boston, Academic Press, MA Publ., 1994. 520 p.

Надійшла (received) 29.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Рудницький Олександр Геннадійович (Рудницкий Александр Геннадиевич, Rudnitskii Alexandr Gennadiyevich) – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, доцент, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (093) 375-06-50; e-mail: a.rudnitskii@gmail.com.

Рудницька Марія Олександрівна (Рудницкая Мария Александровна, Rudnyska Maria Alexandrovna) – провідний інженер, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (093) 375-06-53; e-mail: misteria_z@bigmir.net.

Ткаченко Людмила Володимирівна (Ткаченко Людмила Владимировна, Tkachenko Ludmila Vlalimirovna) – кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (066) 450-79-11; e-mail: lusia.tkch@gmail.com.

УДК 628.337:66.087.5

А. П. САФОНИК, О. В. ПРИСЯЖНЮК, В. А. ПАСІЧНИК**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИЩЕННЯ СТИЧНИХ ВОД МЕТОДОМ ЕЛЕКТРОКОАГУЛЯЦІЇ В НЕІЗОТЕРМІЧНИХ УМОВАХ**

Проаналізовано проблеми моделювання процесу очищення води в електрокоагуляційній камері в неізотермічних умовах. Визначено основні параметри для розрахунку тепло- та масопереносу в електрокоагуляторі. Побудовано математичну модель, що описує закономірності протікання процесів в електрокоагуляційній установці із уточненням оптимальних параметрів. Знайдено розв'язки відповідної модельної задачі з використанням асимптотичного наближення розв'язку відповідної крайової задачі та наведені результати комп'ютерного експерименту.

Ключові слова: математичне моделювання, електрокоагуляція, електрофлотация, температурний режим.

А. П. САФОНИК, Е. В. ПРИСЯЖНЮК, А. В. ПАСЕЧНИК**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОКОАГУЛЯЦИИ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

Проанализированы проблемы моделирования процесса очистки воды в электрокоагуляционной камере в неизоотермических условиях. Определены основные параметры для расчета тепло- и массопереноса в электрокоагуляторе. Построена математическая модель, описывающая закономерности протекания процессов в электрокоагуляционной установке с уточнением оптимальных параметров. Найдено решение соответствующей модельной задачи с использованием асимптотического приближения решения соответствующей краевой задачи и приведены результаты компьютерного эксперимента.

Ключевые слова: математическое моделирование, электрокоагуляция, электрофлотация, температурный режим.

А. Р. САФОНЫК, О. В. ПРЯСЯЖНИУК, В. А. ПАСИЧНЫК**MODELING OF PROCESS OF WASTEWATER TREATMENT BY ELECTROCOAGULATION IN NON-ISOTHERMAL CONDITIONS**

The problems of modeling the process of water treatment in an electrocoagulation chamber in nonisothermal conditions are analyzed. The basic parameters for calculating the mass and heat transfer in the electrocoagulator are determined. The mathematical model describing the patterns of process flow in the electrocoagulation installation with the specification of the optimal parameters of the process is constructed. The solutions of the corresponding model problem are found using the asymptotic approximation of the solution of the corresponding boundary value problem and the results of the computer experiment are given. In this case study, the effect of current strength on the concentration of the target component at the exit from the

© А. П. Сафоник, О. В. Присяжнюк, В. А. Пасічник, 2019